今井研 新人研修2020
「確率・統計」 演習問題の解答

Yuma Uchiumi

March 3, 2020

1　確率

問題　ある病気について疾患の有無を調べる簡易的な検査方法がある．この方法によると，疾患がないのに陽性反応が出てしまう確率は 20%であり，一方疾患があるのに陰性となる確率は 10%である．その病気にかかっているのは全体の 10%であるとする．このとき，ある患者に陽性反応が出たとき，その患者が病気にかかっている確率を Bayes の定理を使って求めよ．

解答　疾患の有無を $B = 1, 0$，陽性/陰性反応を $A = 1, 0$ とする．問題文より

$$
\begin{aligned}
p(A=1|B=0) &= \frac{20}{100} \quad \text{疾患がないとき，陽性となる確率} \\
p(A=0|B=1) &= \frac{10}{100} \quad \text{疾患があるとき，陰性となる確率} \\
p(B=1) &= \frac{10}{100} \quad \text{疾患がある確率}
\end{aligned}
$$

加えて，

$$
\begin{aligned}
P(A=0|B=0) &= \frac{80}{100} \quad \text{疾患がないとき，陰性となる確率} \\
P(A=1|B=1) &= \frac{90}{100} \quad \text{疾患があるとき，陽性となる確率} \\
P(B=0) &= \frac{90}{100} \quad \text{疾患がない確率}
\end{aligned}
$$

だから，ベイスの定理を適用すれば，

$$
\begin{aligned}
p(B=1|A=1) &= \frac{p(A=1, B=1)}{p(A=1)} \\
&= \frac{p(A=1|B=1)p(B=1)}{p(A=1|B=1)p(B=1) + P(A=1|B=0)p(B=0)} \\
&= \frac{\frac{90}{100}\frac{10}{100}}{\frac{90}{100}\frac{10}{100} + \frac{90}{100}\frac{20}{100}} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

2　確率分布と期待値

問題　確率変数 X の確率密度関数が $f_X(x) = e^{-x} \quad (x > 0)$ で与えられるとする．

(a) 正の整数 k に対して，$E[X^k]$ を求めよ．

(b) $\sigma 0$ に対して，$Y = \sigma X + \mu$ と変数変換するとき，Y の確率密度関数を求めよ．

解答　(a) $E[X^k] = \int_0^\infty x^k e^{-x} dx = k!$

(b) 確率分布関数 $F_Y(y)$ について，

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sigma X + \mu \leq y) = P(X \leq \frac{y-\mu}{\sigma}) = F_X(\frac{y-\mu}{\sigma})$$

だから，

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(\frac{y-\mu}{\sigma})}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = f_X(\frac{y-\mu}{\sigma}) \cdot \frac{1}{\sigma}$$

となる．よって，

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

3　代表的な確率分布

なし

4　標本分布とその近似

問題　$X_1, \ldots, X_n i.i.d. \sim p_X(x)$ とする．このとき，確率変数 X の平均 $E[X] = \mu$ と分散 $V[X] = \sigma^2$ を用いて，標本平均 $\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ の平均と分散を求めよ．

解答　期待値の線形性

$$\begin{aligned} E[aX + bX] &= aE[X] + bE[Y] \\ V[aX + bX] &= a^2 E[X] + b^2 E[Y] \quad (\text{X と Y が独立のとき}) \end{aligned}$$

を使えばよい．

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \\ E[\bar{X}] &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu = \mu \\ V[\bar{X}] &= V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n V[X_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

5　統計的推定

問題　$X_1, \ldots, X_n i.i.d. \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ に従うとする．σ^2 の最尤推定量を求めよ．

解答　σ^2 の対数尤度関数は，

$$\begin{aligned}
\ell(\sigma^2|X) &= \log \prod_{i=1}^{n} p(X_i) \\
&= \log \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{X_i^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \log \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= -\frac{n}{2} \log 2\pi\sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2\sigma^2}
\end{aligned}$$

だから，これを σ^2 に対して微分すると，

$$\frac{\partial \ell(\sigma^2|X)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2\sigma^4}$$

よって，$\frac{\partial \ell(\sigma^2|X)}{\partial \sigma^2} = 0$ を解けば，σ^2 の最尤推定量は，$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$ となる．

6　統計的仮説検定

問題　一般に，ワイン瓶 1 本の内容量は 750ml である．しかし，K くんは W 社の製造するワイン瓶について，内容量が規定の 750ml よりも少ないのではないかと疑っている．調査の結果，K くんは W 社が製造した 100 本のワイン瓶を標本として得た．この場合，帰無仮説と対立仮説をどのように設定するのが適切であるか答えよ．また，適切な検定方式について答えよ．

解答

- 帰無仮説: W 社の製造するワイン瓶の平均内容量は 750ml である．
- 対立仮説: W 社の製造するワイン瓶の平均内容量は 750ml より少ない．
- 検定方式: 標本平均・標本不変分散を求めて，片側 t 検定を行う．